Expression des $\zeta(2k)$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Leçon : 230, 241, 243, 246, 265

Réf : XENS, Analyse 2

Lemme 1

Soit $\left| \begin{array}{l} f : \mathring{D}(0, 2\pi) \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \frac{z}{e^z - 1} \\ 0 \mapsto 1 \end{array} \right.$. Alors, pour tout $|z| < 2\pi$,

$$f(z) = 1 - \frac{z}{2} + 2 \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{2k}} \right) z^{2k}.$$

Preuve

$e^z - 1 \underset{z \to 0}{\sim} z$, donc $f(z) \underset{z \to 0}{\to} 1$. Ainsi en posant $f(0) = 1$, on obtient

bien un prolongement par continuité.

On va calculer les coeff de Fourier d'une fonction auxiliaire.

On pose donc $\left| \begin{array}{l} \varphi :]-\pi, \pi[\to \mathbb{C} \\ x \mapsto \exp\left(\frac{zx}{2\pi}\right) \end{array} \right.$ que l'on prolonge

en une fct 2π périodique, pour $z \in \mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z}$

Soit $n \in \mathbb{Z}^*$. Alors

$$c_n(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) e^{-inx} \, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{zx}{2\pi}} e^{-inx} \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\left(\frac{z}{2\pi} - in\right)x} \, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\frac{z}{2\pi} - in} \left[e^{\frac{zx}{2\pi}} e^{-inx} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^n \left(e^{z/2} - e^{-z/2}\right)}{z - 2i\pi n}$$

La fonct° φ est C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. Donc par le théorème de Dirichlet, sa série de Fourier converge en tout point $x\in\mathbb{R}$ vers $\frac{1}{2}(\varphi(x+0)+\varphi(x-0))$. Ainsi, $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\frac{1}{2}(\varphi(x+0)+\varphi(x-0)) = \cancel{(e^{\gamma/2}-e^{-\gamma/2})\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{\gamma+2i\pi m}{\gamma^2+4\pi^2m^2}}, \text{ ~~il vient~~}$$

~~pour~~

$$= (e^{\gamma/2}-e^{-\gamma/2})\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^m}{\gamma-2i\pi m}e^{+imx}$$

Pour $x=\pi$, on a

$$\frac{1}{2}(\varphi(x+0)+\varphi(x-0)) = \frac{1}{2}(e^{\gamma/2}+e^{-\gamma/2}) (= \operatorname{ch}(\gamma/2)), \text{ et donc}$$

$$\frac{\cancel{\operatorname{ch}(\gamma/2)}\ e^{\gamma/2}+e^{-\gamma/2}}{2(e^{\gamma/2}-e^{-\gamma/2})} = \frac{1}{\gamma}+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\gamma}{\gamma^2+4\pi^2m^2}.$$

(on isole le terme $m=0$ et on regroupe les termes pour m et $-m$, $m\neq 0$).

$$\frac{(-1)^{-m}}{\gamma+2i\pi m}(-1)^m+\frac{(-1)^m(-1)^m}{\gamma-2i\pi m} = \frac{2\gamma}{\gamma^2+4\pi^2m^2}$$

Or le 1er membre vaut: $\dfrac{e^{\gamma}+1}{2(e^{\gamma}-1)} = \dfrac{e^{\gamma}-1+2}{2(e^{\gamma}-1)} = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{e^{\gamma}-1}$.

En faisant $-\frac{1}{2}$ et $\times\gamma$, on obtient

$$f(\gamma) = 1-\frac{\gamma}{2}+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\gamma^2}{\gamma^2+4\pi^2m^2}.$$

Développons cette série entière.

On a pour $|\gamma|<2\pi$, $\dfrac{\gamma^2}{\gamma^2+4\pi^2m^2} = \dfrac{\gamma^2}{4\pi^2m^2}\,\dfrac{1}{1+\left(\frac{\gamma}{2\pi m}\right)^2}$

$$= \frac{z^2}{4\pi^2 m^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(4\pi^2 m^2)^k}$$

$|z| < 2\pi \leq 2m\pi,\ m \in \mathbb{N}^*$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2(k+1)}}{(4\pi^2 m^2)^{k+1}} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^{2k}}{(4\pi^2 m^2)^k}.$$

On pose pour $m, k \in \mathbb{N}^*$, $u_{m,k} = (-1)^{k-1} \dfrac{z^{2k}}{(4\pi^2 m^2)^k}$.

Mq $\displaystyle\sum_{m \in \mathbb{N}^*} \Big(\sum_{k \in \mathbb{N}^*} |u_{m,k}| \Big) < +\infty$.

On a pour $m \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}^*} |u_{m,k}| = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{|z|^{2k}}{(4\pi^2 m^2)^k}$

$$= \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{|z|^2}{(4\pi^2 m^2)} \right)^k$$

$$= \frac{|z|^2}{4\pi^2 m^2} \frac{1}{1 - \frac{|z|^2}{4\pi^2 m^2}} = \frac{|z|^2}{4\pi^2 m^2 - |z|^2}.$$

et $\displaystyle\sum_{m \in \mathbb{N}^*} \frac{|z|^2}{4\pi^2 m^2 - |z|^2} < +\infty$.

Donc par le théorème de Fubini Lebesgue, pour $|z| < 2\pi$, $z \neq 0$
on peut inverser l'ordre de sommations, et on obtient

$$f(z) = 1 - \frac{z}{2} + 2 \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}} \Big(\sum_{m \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{m^{2k}} \Big) z^{2k}.$$

Comme $f(0) = 1$, l'égalité est vraie $\forall |z| < 2\pi$ $\square$

Théorème 2
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors $\displaystyle\zeta(2k) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^{2k}} = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2m)!} b_{2k}$.

Rappel: nombres de Bernoulli b_m.

Ils sont définis par $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$.

On a donc par ce qui précède : $\cdot\ b_0 = 1$

$\cdot\ b_1 = -1/2$

$\cdot\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_{2n+1} = 0$.

On peut mq : $0 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!}$ (produit CY, $f(z)$ et e^z-1).

Faisons le : Soit $|z| < 2\pi$,

$$f(z)(e^z-1) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n\right)\left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{z^{p+1}}{(p+1)!}\right)$$

$$= z\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n+p=k} \frac{b_n}{n!} \frac{1}{(p+1)!}\right) z^k$$

et $\sum_{n+p=k} \frac{b_n}{n!}\frac{1}{(p+1)!} = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{b_n}{n!}\frac{1}{(k-n)!}$

et $f(z)(e^z-1) = z$. Donc pour $k \geq 2$, $\sum_{n=0}^{k-1} \frac{b_n}{n!}\frac{1}{(k-n)!} = 0$.

donc $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k = 0 \Rightarrow \forall n \geq 2,\ b_{n-1} = -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k} b_k$

parler des b_n dans une leçon sur les sommes, DSE.

$\to b_0 = 1$ $\quad \to b_3 = 0$

$\to b_1 = -1/2$ $\quad \to b_4 = -\frac{1}{5}\left[\binom{5}{2} b_2 + \cancel{\binom{5}{3} b_3} + \binom{5}{4} b_4 \dots\right]$

$\to b_2 = 1/6$ $\quad \hookrightarrow = -\frac{1}{30}$.

__Preuve__ (théorème) Soit $n \geq 2$.

On a alors $\frac{b_{2n}}{(2n)!} = 2\frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^{2n}} = 2\frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^{2n}}\zeta(2n)$

$$\Rightarrow \boxed{\zeta(2n) = (-1)^{n-1}\frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} b_{2n}}.$$

App : $\zeta(2) = \frac{4\pi^2}{4}\cdot 1/6 = \pi^2/6$

$\zeta(4) = -\frac{(2\pi)^4}{2\times 4!}\cdot -1/30 = \frac{\pi^4}{90}$ $\square$